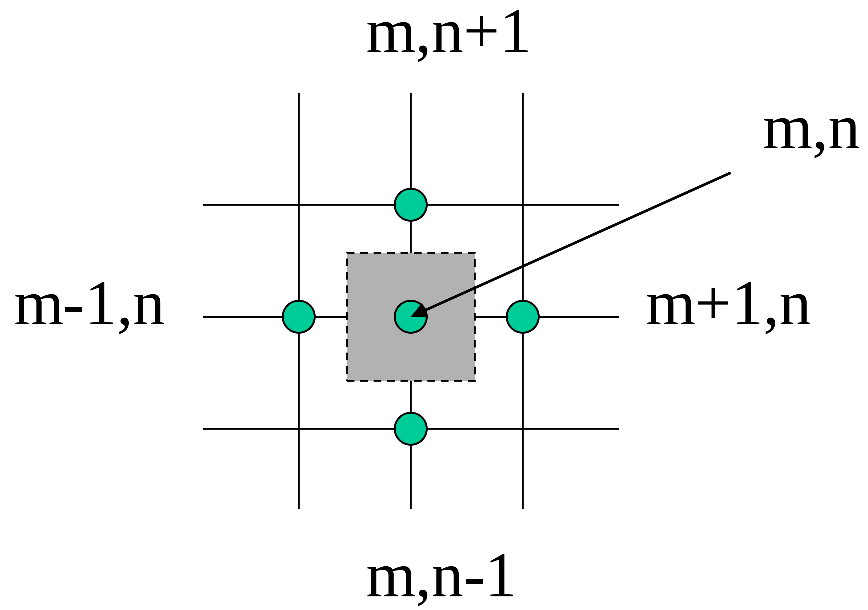
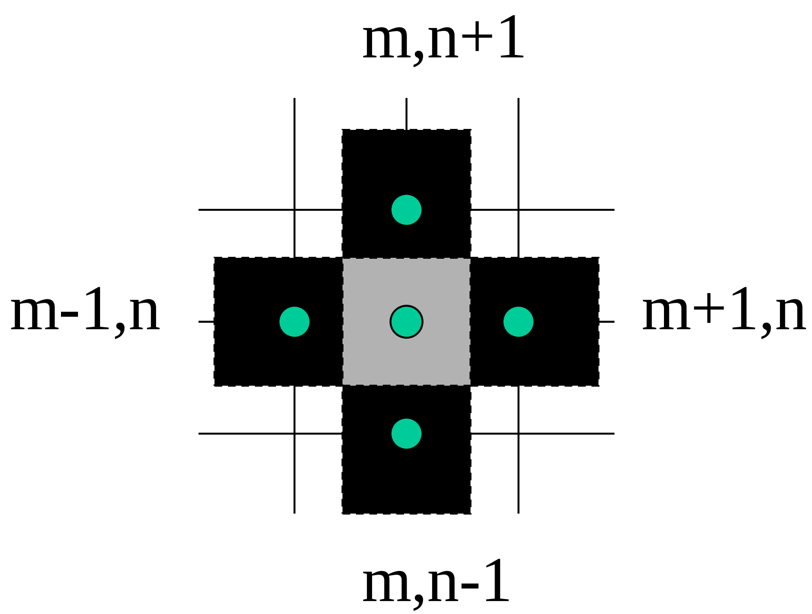
METODO DEL BALANCE DE ENERGÍA
DIFERENCIAS FINITAS



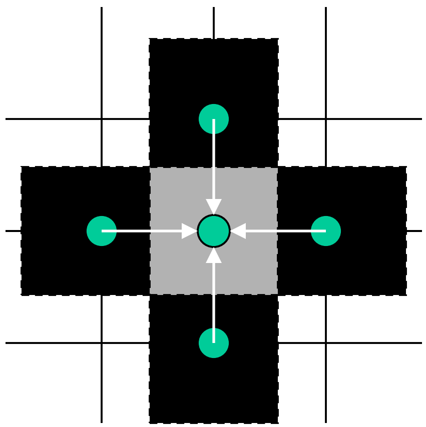
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{(\Delta y)^2}$$

BALANCE DE CALOR EN UN NODO



$$\sum_{i=1}^{4} q(i) \rightarrow (m,n) + \dot{q}\left(\Delta x.\Delta y.1\right) = 0$$



$$q_{(m-1,n)\to(m,n)} = k(\Delta y.1)\frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m+1,n)\to(m,n)} = k(\Delta y.1)\frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m,n+1)\to(m,n)} = k(\Delta x.1)\frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$q_{(m,n-1)\to(m,n)} = k(\Delta x.1)\frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\sum_{i=1}^{4} q(i) \to (m,n) + \dot{q}(\Delta x.\Delta y.1) = 0$$

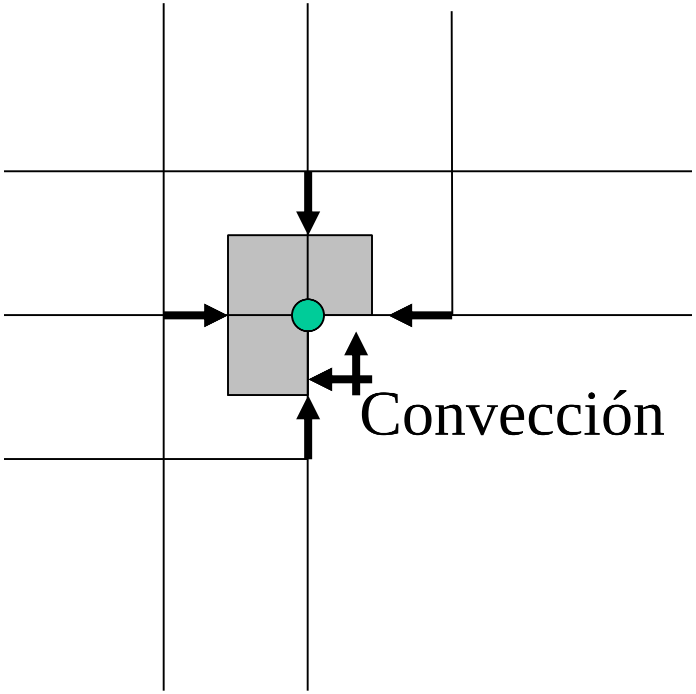
$$k\left\{\begin{aligned}&(\Delta y)\frac{T_{m-1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}+(\Delta y)\frac{T_{m+1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}+\\&(\Delta x)\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta y}+(\Delta x)\frac{T_{m,n-1}-T_{m,n}}{\Delta y}\end{aligned}\right\}+\dot{q}\Delta x\Delta y=0$$

Si $\Delta x=\Delta y$:

$$k\left\{\begin{aligned}&\left(T_{m-1,n}-T_{m,n}\right)+\left(T_{m+1,n}-T_{m,n}\right)+\\&\left(T_{m,n+1}-T_{m,n}\right)+\left(T_{m,n-1}-T_{m,n}\right)\end{aligned}\right\}+\dot{q}\Delta x^2=0$$

Finalmente para un nodo interior:

$$T_{m-1,n}+T_{m+1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-4T_{m,n}+\frac{\dot{q}\Delta x^2}{k}=0$$



$$q_{(m-1,n)\to(m,n)} = k(\Delta y.1)\frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m+1,n)\to(m,n)} = k\left(\frac{\Delta y}{2}.1\right)\frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m,n+1)\to(m,n)} = k(\Delta x.1)\frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

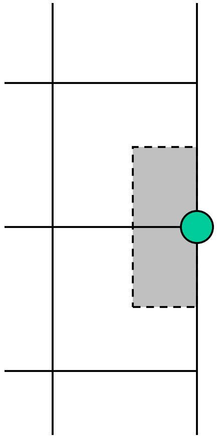
$$q_{(m,n-1)\to(m,n)} = k\left(\frac{\Delta x}{2}.1\right)\frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$q_{(\infty)\to(m,n)} = h\left(\frac{\Delta x}{2}.1\right)\left(T_{\infty} - T_{m,n}\right) + h\left(\frac{\Delta y}{2}.1\right)\left(T_{\infty} - T_{m,n}\right)$$

Finalmente para un nodo en una esquina interna con convección:

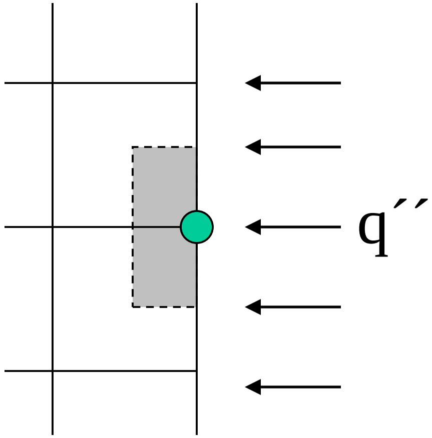
$$2\left(T_{m-1,n}+T_{m,n+1}\right)+\left(T_{m+1,n}+T_{m,n-1}\right)+2\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty}-2\left(\frac{h\Delta x}{k}+3\right)T_{m,n}=0$$

Otros casos:



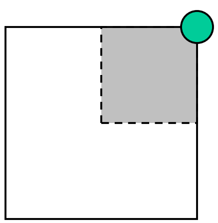
Nodo en una superficie plana con convección:

$$\left(2T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}\right)+2\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty}-2\left(\frac{h\Delta x}{k}+2\right)T_{m,n}=0$$



Nodo en una superficie plana con flujo de calor uniforme:

$$\left(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}\right) + 2\frac{q''\Delta x}{k} T_{\infty} - 4T_{m,n} = 0$$



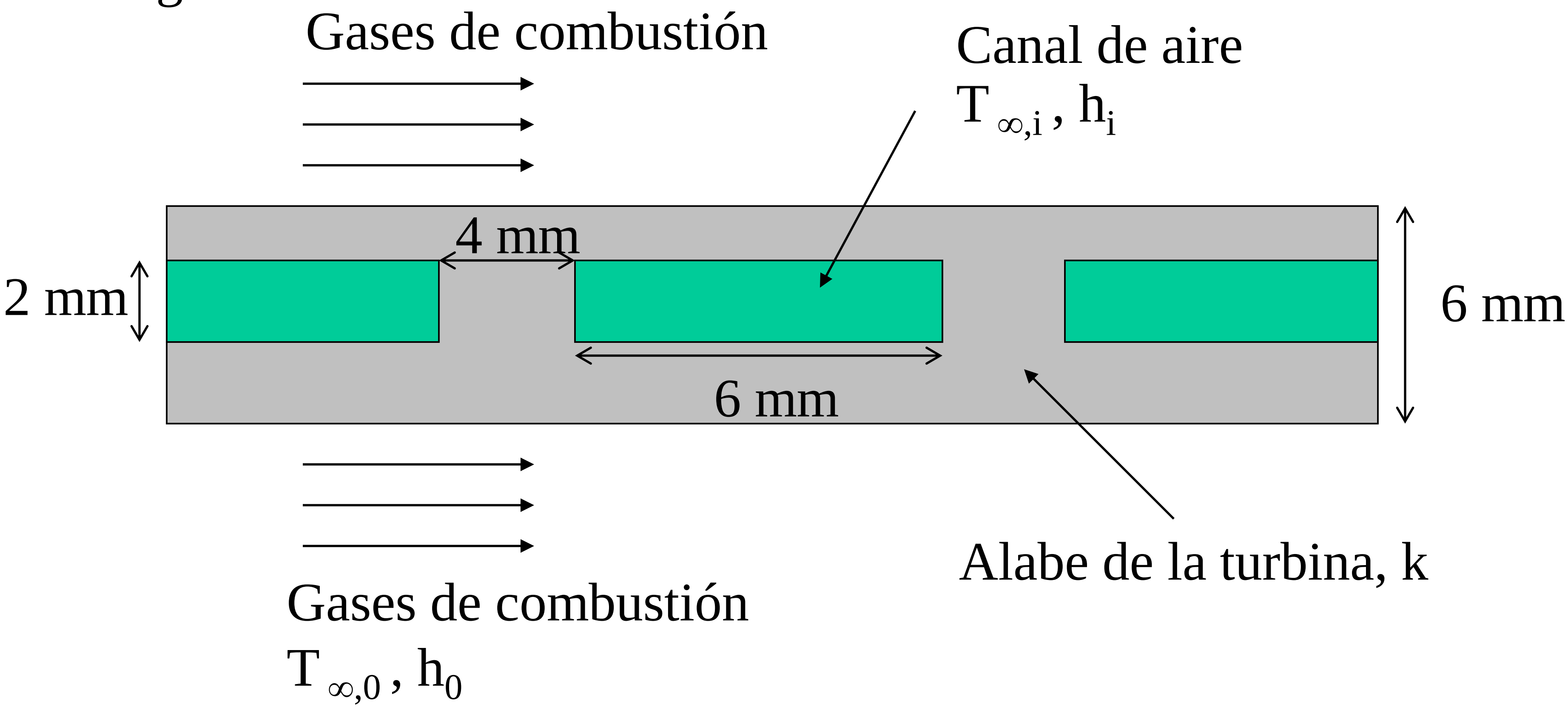
Nodo en una esquina externa con convección:

$$\left(2T_{m-1,n} + T_{m,n-1}\right) + 2\frac{h\Delta x}{k} T_{\infty} - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 1\right) T_{m,n} = 0$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS: TRANSFERENCIA DE CALOR

Un objetivo importante en tecnologías avanzadas de motores de turbina de gas es aumentar el límite de temperatura asociado con la operación de los álabes de la turbina de gas. Este límite determina la temperatura permisible de entrada del gas a la turbina que, a su vez, influye mucho en el rendimiento global del sistema. Además, para fabricar hojas de turbina con super-aleaciones especiales de alta resistencia y alta temperatura, es normal utilizar enfriamiento interno mediante canales de flujo grabado en los álabes y dirigir aire a través de los canales. Se desea evaluar el efecto de este esquema aproximando el álabe como un sólido rectangular en el que se graban canales rectangulares.

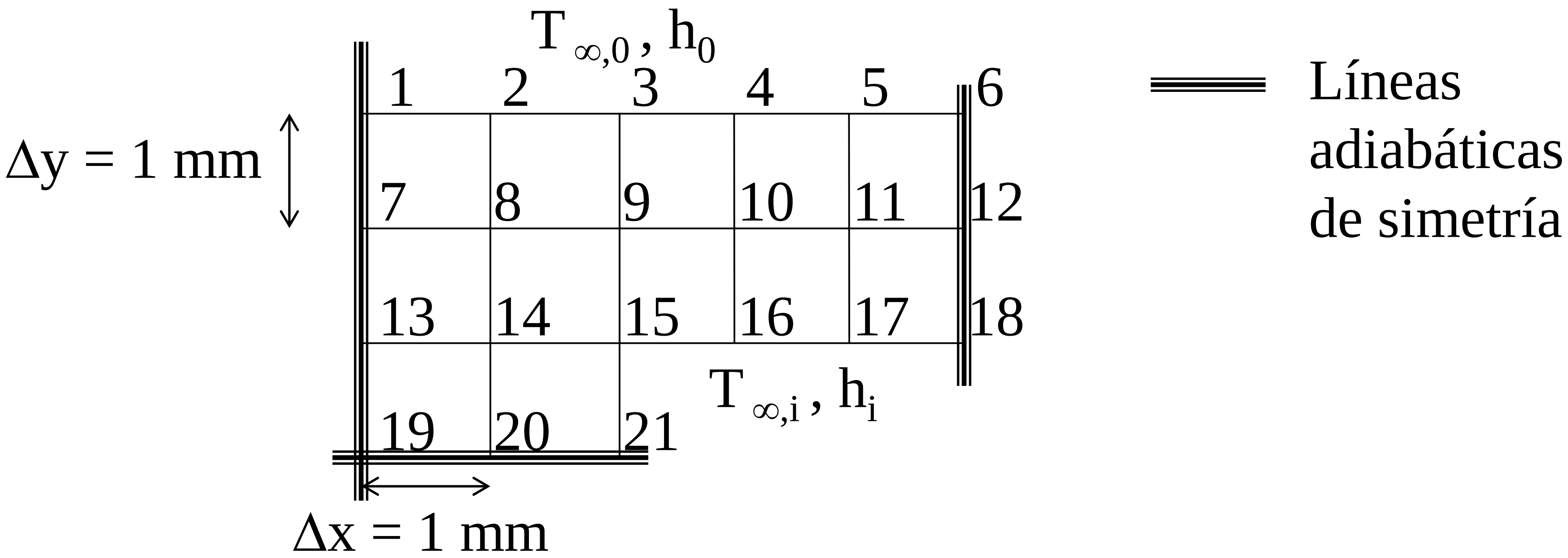
El álabe, que tiene una conductividad térmica de k = 25 W/m.K, mide 6 mm de espesor, y cada canal tiene una sección transversal rectangular de 2x6 mm, con un espaciado de 4 mm entre canales contiguos.



En condiciones de operación para las que h_0 = 1000 W/m^2.K, $T_{\infty,0}$ = 1700 K, h_i = 200 W/m^2.K y $T_{\infty,i}$ = 400 K, determine el campo de temperaturas en el álabe de la turbina y la transferencia de calor por unidad de longitud en el canal. ¿En qué lugar la temperatura es un máximo?

SOLUCION:

Luego de estudiar los planos de simetría la región de interés es:



SUPOSICIONES:

•Conducción bidimensional de estado estable.

•Propiedades constantes.

ANALISIS:

Haciendo un balance de calor en los nodos se tiene:

Nodos 1, 6 y 21:

La transferencia de calor a los nodos 1, 6, 18, 19 y 21 ocurre por conducción de los nodos vecinos, así como por convección del fluido exterior. No hay transferencia de calor de la región más allá de la adiabática de simetría, la aplicación de un balance de energía al cuarto de sección, asociado con el nodo, da una ecuación de diferencias finitas que para el nodo 1 tiene la forma:

$$T_2 + T_7 - \left(2 + \frac{h_0 \Delta x}{k}\right) T_1 = -\frac{h_0 \Delta x}{k} T_{\infty,0}$$

Nodos 2, 3 y 4:

Los nodos del 2 al 5 corresponden al caso de nodos en una superficie plana con convección. Por ejemplo para el nodo 3:

$$T_2 + T_4 + 2T_9 - 2\left(2 + \frac{h_0 \Delta x}{k}\right) T_3 = -2\frac{h_0 \Delta x}{k} T_{\infty,0}$$

Nodos 7, 12, 13 y 20:

Los nodos del 7, 12, 13 y 20 corresponden al caso de nodos en una superficie plana adiabática. Por ejemplo para el nodo 12:

$$T_6 + 2T_{11} + T_{18} - 4T_{12} = 0$$

Nodos 8, 9, 10, 11 y 14:

Los nodos del 8, 9, 10, 11 y 14 corresponden al caso de nodos interiores. Por ejemplo para el nodo 8:

$$T_2 + T_7 + T_9 + T_{14} - 4T_8 = 0$$

Nodo 15:

El nodo 15 corresponde al caso de una esquina interna:

$$2T_9 + 2T_{14} + T_{16} + T_{21} - 2\left(3 + \frac{h_i \Delta x}{k}\right)T_{15} = -2\frac{h_i \Delta x}{k}T_{\infty,i}$$

Nodos 16 y 17:

Los nodos 16 y 17 corresponden al caso de nodos en una superficie plana con convección. Por ejemplo para el nodo 16:

$$2T_{10} + T_{15} + T_{17} - 2\left(2 + \frac{h_i \Delta x}{k}\right)T_{16} = -2\frac{h_i \Delta x}{k}T_{\infty,i}$$

Nodos 18 y 21:

Los nodos 18 y 21 corresponden al caso de nodos en una esquina con convección del flujo interno. Por ejemplo para el nodo 18:

$$T_{12} + T_{17} - 2\left(2 + \frac{h_i \Delta x}{k}\right)T_{18} = -2\frac{h_i \Delta x}{k}T_{\infty,i}$$

Nodo 19:
El nodo 19 tiene dos superficies adiabáticas y experimenta transferencia de calor por conducción a traves de las otras dos superficies.

$$T_{13} + T_{20} - 2T_{19} = 0$$

Sistema de ecuaciones lineales:
Se tiene un total de 21 ecuaciones linealmente independientes, con 21 incognitas $\{T_1, T_2, ..., T_{21}\}$. Este sistema se puede resolver dando como resultados los siguientes valores reportados en la siguiente tabla:.

	PROBLEMA DEL ALABE											
	$\Delta x = \Delta y =$ 1 mm											
Nodo		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Temperatura, K		1526	1525,3	1523,6	1521,9	1520,8	1520,5	1519,7	1518,8	1516,5	1514,5	
Nodo		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Temperatura, K		1513	1512,9	1515,1	1513,7	1509,2	1506,4	1505	1504,5	1513,4	1511,7	1506

¿En qué lugar la temperatura es máxima?:
Como era de esperarse, la temperatura máxima se encuentra en el nodo que está más alejado del fluido refrigerante; es decir el nodo 1.

Determine la transferencia de calor por unidad de longitud del canal.
Esto se puede calcular de dos maneras:

$$q' = 4h_i \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\Delta y}{2}\right)\left(T_{21} - T_{\infty,i}\right) + \left(\frac{\Delta x + \Delta y}{2}\right)\left(T_{15} - T_{\infty,i}\right) + (\Delta x)\left(T_{16} - T_{\infty,i}\right) \\ + (\Delta x)\left(T_{17} - T_{\infty,i}\right) + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)\left(T_{18} - T_{\infty,i}\right) \end{array} \right]$$

ó:

$$q' = 4h_o \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)\left(T_{\infty,0} - T_1\right) + (\Delta x)\left(T_{\infty,0} - T_2\right) + (\Delta x)\left(T_{\infty,0} - T_3\right) \\ + (\Delta x)\left(T_{\infty,0} - T_4\right) + (\Delta x)\left(T_{\infty,0} - T_5\right) + \left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)\left(T_{\infty,0} - T_6\right) \end{array} \right]$$

$$q' = 3540{,}6 \text{ W / m}$$

Tamaño de la malla:

Si se reduce el tamaño de la malla a la mitad; es decir,

$$\Delta y = \Delta x = 0{,}5 \text{ mm}$$

las temperaturas varían en el orden de ±0,1 K y el calor en el orden de ±0,7 W/m.

Estudio del efecto de k y h:

Si se repiten estos cálculos para diferentes valores de k y h, se obtienen los siguientes valor de q´ y de la temperatura máxima en el álabe (temperatura del nodo 1).

k (W/m.K)	hi(W/m2.K)	T1(K)	q´(W/m)
25	200	1526	3540,6
50	200	1523,4	3563,3
25	1000	1154,5	11095,5
50	1000	1138,9	11320,7